

Epreuve Standardisée des Compositions du second Semestre : Mathématiques

CORRECTION DE L'ÉPREUVE

EXERCICE 1: (Complexes) (05pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 2cm

Soit le polynôme P défini par: $P(z) = z^3 - (7 + i)z^2 + 2(8 + 3i)z - 10(1 + i)$, Pour $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $z_0 = 1 + i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$. [0,5pt]

$$\begin{aligned} \text{On a : } P(z_0) &= z_0^3 - (7 + i)z_0^2 + 2(8 + 3i)z_0 - 10(1 + i) \\ &= (1 + i)^3 - (7 + i)(1 + i)^2 + 2(8 + 3i)(1 + i) - 10(1 + i) \\ &= (1 + 3i - 3 - i) - (7 + i)(1 + 2i) + 2(8 + 8i + 3i - 3) - 10 - 10i \\ &= -2 + 2i - 14i + 2 + 10 + 22i - 10 - 10i \\ &= (-2 + 2 + 10 - 10) + i(-12 + 12) \end{aligned}$$

$$P(z_0) = 0 \text{ donc } z_0 = 1 + i \text{ est une solution de l'équation } P(z) = 0$$

2. Déterminer les réels a , b et c tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$; [0,75pt]

Déterminons les réels a , b et c par la méthode de HORNER

Coef. De $P(z)$	1	-7-i	16+6i	-10-10i
Racine $z_0 = 1 + i$		$1 + i$	-6-6i	10+10i
Coef. $Q(z)$	1	-6	10	0

$$\text{Donc } Q(z) = z^2 - 6z + 10 \text{ avec } a = 1; b = -6 \text{ et } c = 10$$

$$\text{D'où } P(z) = (z - z_0)(z^2 - 6z + 10)$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$; [0,5pt]

$$\text{On a : } P(z) = 0 \Leftrightarrow z = z_0 \text{ ou } z^2 - 6z + 10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 36 - 40$$

$$\Delta = -4 = (2i)^2 \text{ donc } \delta = 2i$$

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{6 - 2i}{2} = 3 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{6 + 2i}{2} = 3 + i$$

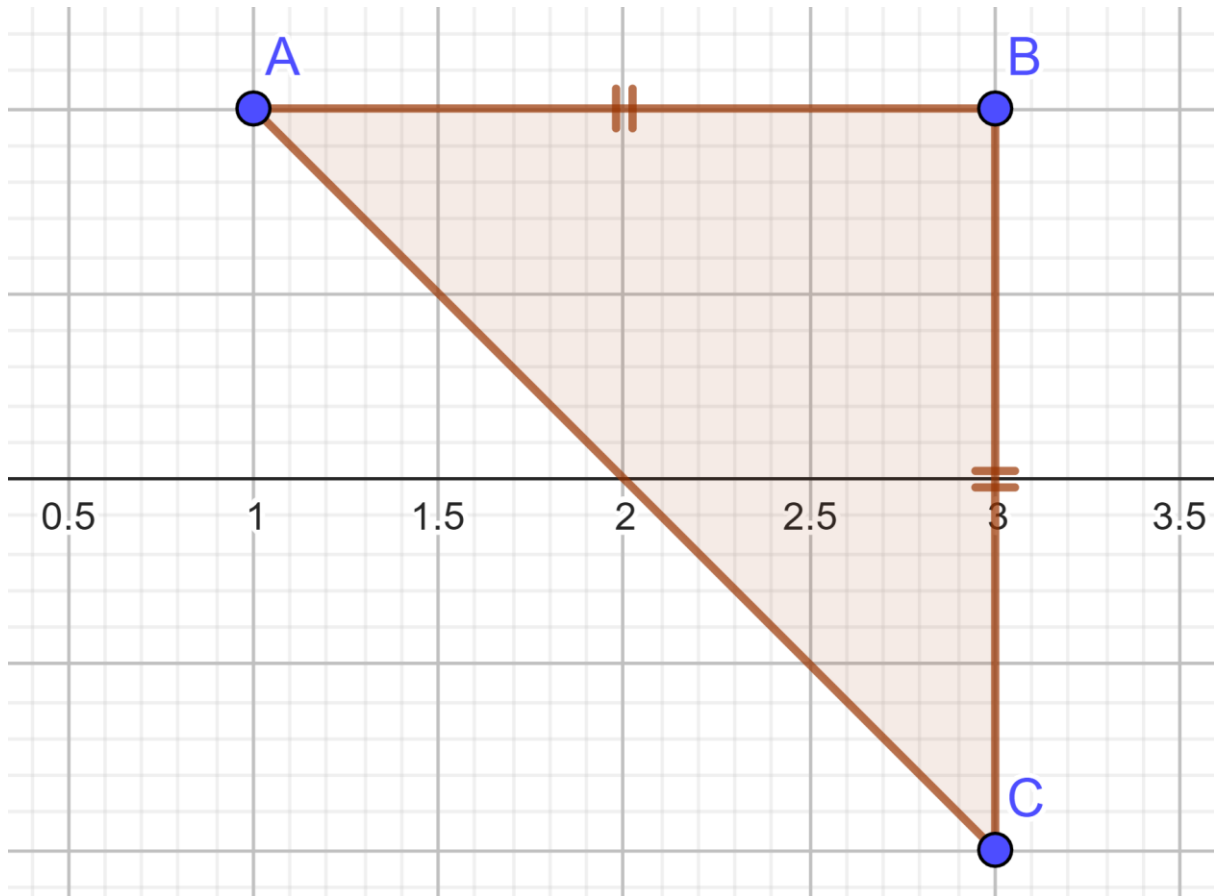
$$\text{D'où } S = \{z_0; z_1; z_2\}$$

4. On considère les points A, B et C du plan d'affixes respectives : $1 + i$; $3 + i$ et $3 - i$.

- a) Placer les points A, B et C dans le repère. [0,75pt]

Epreuve Standardisée des Compositions du second Semestre : Mathématiques

CORRECTION DE L'ÉPREUVE



b) Calculer et écrire sous forme exponentielle : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$; [0,5pt]

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1+i-3-i}{3-i-3-i} = \frac{-2}{-2i} = -i$$

donc $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = -i$

On a : $\left| \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right| = |-i| = 1$ et $\text{Arg}\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \arg(-i) = \frac{-\pi}{2} [2\pi]$

D'où $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Epreuve Standardisée des Compositions du second Semestre : Mathématiques

CORRECTION DE L'EPREUVE

c) En déduire la nature exacte du triangle ABC.

[0,5pt]

$$\text{On a : } \left| \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right| = 1 \Leftrightarrow BC = BA \text{ et } \text{Arg}\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{-\pi}{2} [2\pi]$$

Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en B

5. Soit T la similitude directe du plan dans lui-même qui laisse invariant le A et qui transforme B en C.

a. Donner l'écriture complexe de T. [0,75pt]

T étant une similitude directe donc l'écriture complexe de T est : $z' = az + b$

$$\text{On a : } \begin{cases} z'_A = az_A + b \\ z'_C = az_C + b \end{cases} \Leftrightarrow z'_A - z'_C = a(z_A - z_C) \Leftrightarrow a = \frac{z'_A - z'_C}{z_A - z_C} = \frac{1+i-3+i}{1+i-3-i} = \frac{-2+2i}{-2}$$

$$\text{On a : } a = 1-i \text{ et } b = z'_A - az_A = 1+i-(1-i)(1+i) = 1+i-2 = -1+i$$

Donc $a = 1-i$ et $b = -1+i$

D'où T : $z' = (1-i)z -1+i$

b. En déduire les éléments caractéristiques de T. [0,75pt]

$$|a| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \text{soit } \theta = \arg(a) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Ainsi les caractéristiques de T sont :

- Son point invariant A(1+i) ;
- Son rapport $k = |a| = \sqrt{2}$;
- Et son angle $\theta = \arg(a) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

EXERCICE 2: (Probabilité)

(04pts)

Partie A :

1. On a : **$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$**

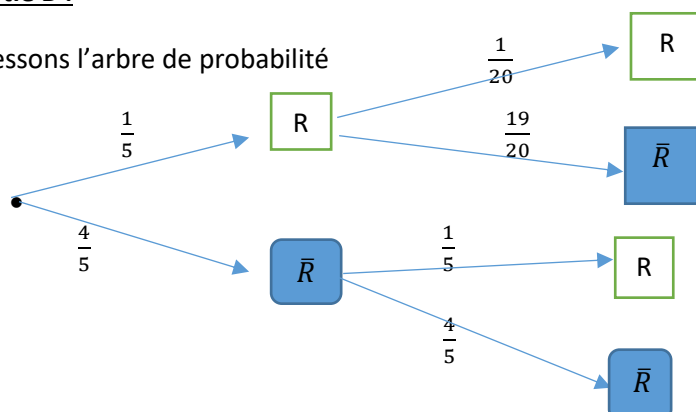
2. On a : $B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$

Donc $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

$P(B) = P(A) \times P(B/A) + P(\bar{A}) \times P(B/\bar{A})$.

Partie B :

Dressons l'arbre de probabilité



Epreuve Standardisée des Compositions du second Semestre : Mathématiques

CORRECTION DE L'ÉPREUVE

1. $P(R_{n+1} \cap R_n) = P(R_n) \times P(R_{n+1}/R_n) = \frac{1}{20} p_n$
 $P(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = P(\overline{R_n}) \times P(R_{n+1}/\overline{R_n}) = \frac{1}{5} (1 - p_n)$ car $P(\overline{R_n}) = 1 - P(R_n)$.
2. $P(R_{n+1}) = P(R_{n+1} \cap R_n) + P(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = \frac{1}{20} p_n - \frac{1}{5} p_n + \frac{1}{5} = \frac{-3}{20} p_n + \frac{1}{5}$
Donc $p_{n+1} = \frac{-3}{20} p_n + \frac{1}{5}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = p_n - \frac{4}{23}$
 - a) on a : $v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{23} = \frac{-3}{20} p_n + \frac{3}{115} = \frac{-3}{20} \left(p_n - \frac{4}{23} \right)$ or $v_n = p_n - \frac{4}{23}$
donc $v_{n+1} = \frac{-3}{20} v_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-3}{20} \in \mathbb{R}$, d'où (v_n) est la suite
géométrique de raison $q = \frac{-3}{20}$ et de premier terme $v_1 = p_1 - \frac{4}{23} = \frac{3}{115}$.
 - b) $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{3}{115} \left(\frac{-3}{20} \right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Or $p_n = v_n + \frac{4}{23}$ donc $p_n = \frac{3}{115} \left(\frac{-3}{20} \right)^{n-1} + \frac{4}{23}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - c) On a : $P(\overline{R_n}) = 1 - P(R_n) = 1 - p_n = 1 - \frac{4}{23} - v_n = \frac{19}{23} - v_n$
Donc $P(\overline{R_n}) = \frac{19}{23} - v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ car $q \in]-1; 1[$
D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{R_n}) = \frac{19}{23}$.